

ANALYTISKA FUNKTIONER

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 19.11.2009

1. Undersök följande komplexa serier med avseende på konvergens och absolut konvergens:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

2. Vilken funktion representeras av potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$?

3. Man kan visa att om potensserierna $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ och $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ båda är absolut konvergenta i $|z| < R$ (>0), så representeras produkten $f(z)g(z)$ av en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ som är absolut konvergent i $|z| < R$, och där $c_n = \sum_{k=0}^n c_k b_{n-k}$. Bestäm potensserieutvecklingen av funktionen $\frac{e^z}{1-z}$ i $|z| < 1$.

4. Utveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$ i potensserier av formen

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - i)^n$ och bestäm seriernas konvergensradier.

5. Bestäm $\int_0^{2\pi} \bar{z} dz$ längs

(a) reella axeln från 0 till 2π , (b) Arkimedes' spiral $z = t e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Låt C beteckna enhetscirkeln $|z| = 1$. Beräkna integralerna

(a) $\int_C (z - 1) dz$, (b) $\int_C (z - 1) |dz|$, då C genomlöps ett varv i positiv omloppsled.